

壹、研究動機 與 貳、研究目的

希望能找出一種較為簡易的方法，可以方便地判斷一個正整數是否為質數。

參、研究設備及器材

一、國中數學課本。二、相關書籍與網路資料。三、筆記型電腦與 Excel 軟體。

肆、研究過程與方法

一、文獻回顧

對於給定一個正整數 N ，如何能「確定」其是否為質數的方法，過去文獻曾經出現下列幾種方式：

(一)傳統的「篩法」與「試除法」

(二)Fermat 的平方法

(三)AKS 質數測試演算法

二、理論推導

大凡從 2 開始遞增的 3、4、5...所有正整數中，除了 2 之外，偶數必定是合成數。而奇數中，除了 5 之外，尾數 5 的奇數都因為含有質因數 5 而必為合成數，所以只剩下尾數是 1、3、7、9 的正整數，才有可能為質數。本理論推導結果整理如下表（表一）前段所示。

表一 尾數為 1、3、5、7 的正整數 N ($N \geq 2$) 試探值與試探範圍 和 (k,n) 二元等差數列公式

正整數 N	可能的組成方式	試探值	試探範圍	(k,n) 二元「等差數列」公式
$N = 10M+1$	$10M+1=(10a+1)(10b+1)$ 其中 $M=10ab+a+b$	$\frac{M-a}{10a+1}$	$\frac{M-1}{11} \geq a \geq 1$	$M=a_n=[12+11(k-1)]+(n-1) \cdot [11+10(k-1)]$
	$10M+1=(10c+3)(10d+7)$ 其中 $M=10cd+7c+3d$	$\frac{M-2-7c}{10c+3}$	$\frac{M-5}{17} \geq c \geq 0$	$M=a_n=[2+7(k-1)]+(n-1) \cdot [3+10(k-1)]$
	$10M+1=(10e+9)(10f+9)$ 其中 $M=10ef+9e+9f$	$\frac{M-8-9e}{10e+9}$	$\frac{M-17}{19} \geq e \geq 0$	$M=a_n=[8+9(k-1)]+(n-1) \cdot [9+10(k-1)]$
$N = 10M+3$	$10M+3=(10g+1)(10h+3)$ 其中 $M=10gh+3g+h$	$\frac{M-3g}{10g+1}$	$\frac{M-1}{13} \geq g \geq 1$	$M=a_n=[3+3(k-1)]+(n-1) \cdot [11+10(k-1)]$
	$10M+3=(10i+7)(10j+9)$ 其中 $M=10ij+9i+7j$	$\frac{M-6-9i}{10i+7}$	$\frac{M-13}{19} \geq i \geq 0$	$M=a_n=[6+9(k-1)]+(n-1) \cdot [7+10(k-1)]$
$N = 10M+7$	$10M+7=(10k+1)(10l+7)$ 其中 $M=10kl+7k+l$	$\frac{M-7k}{10k+1}$	$\frac{M-1}{17} \geq k \geq 1$	$M=a_n=[7+7(k-1)]+(n-1) \cdot [11+10(k-1)]$
	$10M+7=(10m+3)(10n+9)$ 其中 $M=10mn+9m+3n$	$\frac{M-2-9m}{10m+3}$	$\frac{M-5}{19} \geq m \geq 0$	$M=a_n=[2+9(k-1)]+(n-1) \cdot [3+10(k-1)]$
$N = 10M+9$	$10M+9=(10p+1)(10q+9)$ 其中 $M=10pq+9p+q$	$\frac{M-9p}{10p+1}$	$\frac{M-1}{19} \geq p \geq 1$	$M=a_n=[9+9(k-1)]+(n-1) \cdot [11+10(k-1)]$
	$10M+9=(10r+3)(10s+3)$ 其中 $M=10rs+3r+3s$	$\frac{M-3r}{10r+3}$	$\frac{M-3}{13} \geq r \geq 0$	$M=a_n=[0+3(k-1)]+(n-1) \cdot [3+10(k-1)]$
	$10M+9=(10t+7)(10u+7)$ 其中 $M=10tu+7t+7u$	$\frac{M-4-7t}{10t+7}$	$\frac{M-11}{17} \geq t \geq 0$	$M=a_n=[4+7(k-1)]+(n-1) \cdot [7+10(k-1)]$

利用表一進行質數的分析方法，我們稱之為「尾數篩法」。以 $N=931=10\times 93+1$ ，為例， $M=93$ 。因其尾數是 1，其試探過程如下所示：

a、c、e=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{93-a}{10a+1}$		$\frac{92}{11}$	$\frac{91}{21}$	$\frac{90}{31}$	$\frac{89}{41}$	$\frac{88}{51}$	$\frac{87}{61}$	$\frac{86}{71}$	$\frac{85}{81}$
$\frac{91-7c}{10c+3}$	$\frac{91}{3}$	$\frac{84}{13}$	$\frac{77}{23}$	$\frac{70}{33}$	$\frac{63}{43}$	$\frac{56}{53}$			
$\frac{85-9e}{10e+9}$	$\frac{85}{9}$	$\frac{76}{19}=4*$	$\frac{67}{29}$	$\frac{58}{39}$	$\frac{49}{49}=1*$				

因為找到 $e=1$ ， $931=19\times 49$ 與 $e=4$ ， $931=49\times 19$ ；所以 931 為合成數，不為質數。

伍、研究結果 與 陸、討論

一、將表一中 10 條「可能的組成方式」之數學式轉換成「等差數列」公式
 表一中 10 條數學式都可以找出其(k,n)二元「等差數列」公式，整理如表一後段所示。

二、Excel 的處理

在 Excel 裡將 10 個公式建立在 10 個不同的「工作表」，並產生出尾數是 1、3、7、9 的合成數。利用 Excel 內建的『編輯(E)』→『尋找(F)』→『選項(T)』→『搜尋範圍(H)』選取「活頁簿」→『搜尋(L)』選取「內容」→『勾選「儲存格內容須完全相符(O)」』→『在「尋找目標(N)」輸入 M 值』，即可知道正整數 N 是否為質數。因為正整數 N 若為合成數，則輸入 M 值必會出現在某個「工作表」的「儲存格」中；反之若沒出現，則正整數 N 即為質數。

以 $N=931=10\times 93+1$ ，為例，如下圖圖一、圖二、圖三、圖四所示；結果會發現 931 為合成數。若以 941 進行測試，結果會發現 941 為質數；如下圖圖五所示。

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	12	23	34	45	56	67	78	89
2	1	12	23	34	45	56	67	78	89
3	2	23	44	65	86	107	128	149	170
4	3	34	65	96	127	158	189	220	251
5	4	45	86	127	168	209	250	291	332
6	5	56	107	158	209	260	311	362	413
7	6	67	128	189	250	311	372	433	494
8	7	78	149	220	291	362	433	504	575
9	8	89	170	251	332	413	494	575	656
10	9	100	191	282	373	464	555	646	737

圖一：尾數 1，1-1x1 的表格。

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93
3	2	5	22	39	56	73	90	107	124	141	158	175	192	209	226
4	3	8	35	62	89	116	143	170	197	224	251	278	305	332	359
5	4	11	48	85	122	159	196	233	270	307	344	381	418	455	492
6	5	14	61	108	155	202	249	296	343	390	437	484	531	578	625
7	6	17	74	131	188	245	302	359	416	473	530	587	644	701	758
8	7	20	87	154	221	288	355	422	489	556	623	690	757	824	891
9	8	23	100	177	254	331	408	485	562	639	716	793	870	947	1024
10	9	26	113	200	287	374	461	548	635	722	809	896	983	1070	1157
11	10	29	126	223	320	417	514	611	708	805	902	999	1096	1193	1290
12	11	32	139	246	353	460	567	674	781	888	995	1102	1209	1316	1423
13	12	35	152	269	386	503	620	737	854	971	1088	1205	1322	1439	1556
14	13	38	165	292	419	546	673	800	927	1054	1181	1308	1435	1562	1689
15	14	41	178	315	452	589	726	863	1000	1137	1274	1411	1548	1685	1822
16	15	44	191	338	485	632	779	926	1073	1220	1367	1514	1661	1808	1955
17	16	47	204	361	518	675	832	989	1146	1303	1460	1617	1774	1931	2088
18	17	50	217	384	551	718	885	1052	1219	1386	1553	1720	1887	2054	2221

圖二：尾數 1，1-3x7 的表格。

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98
3	2	17	36	55	74	93	112	131	150	169	188	207
4	3	26	55	84	113	142	171	200	229	258	287	316
5	4	35	74	113	152	191	230	269	308	347	386	425
6	5	44	93	142	191	240	289	338	387	436	485	534
7	6	53	112	171	230	289	348	407	466	525	584	643
8	7	62	131	200	269	338	407	476	545	614	683	752
9	8	71	150	229	308	387	466	545	624	703	782	861
10	9	80	169	258	347	436	525	614	703	792	881	970
11	10	89	188	287	386	485	584	683	782	881	980	1079
12	11	98	207	316	425	534	643	752	861	970	1079	1188
13	12	107	226	345	464	583	702	821	940	1059	1178	1297

圖三：尾數 1，1-9x9 的表格。

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	9	16	23	30	37	44	51	58	65	72	79	86	93	100	
3	22	39	56	73	90	107									
4	35	62	89	116	143	170									
5	48	85	122	159	196	233									
6	61	108	155	202	249	296									
7	74	131	188	245	302	359									
8	87	154	221	288	355	422									
9	100	177	254	331	408	485									
10	113	200	287	374	461	548									
11	126	223	320	417	514	611									
12	139	246	353	460	567	674									
13	152	269	386	503	620	737									
14	165	292	419	546	673	800									
15	178	315	452	589	726	863									
16	191	338	485	632	779	926									
17	204	361	518	675	832	989									

圖四：利用 Excel 搜尋，931 為合成數。

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	12	23	34	45	56	67	78	89	100
2	23	44	65	86	107	128	149	170	191
3	34	65	96	127	158	189	220	251	282
4	45	86	127	168	209	250	291	332	373
5	56	107	158	209	260	311	362	413	464
6	67	128	189	250	311	372	433	494	555
7	78	149	220	291	362	433	504	575	646
8	89	170	251	332	413	494	575		
9	100	191	282	373	464	555	646		

圖五：測試 941，結果為質數。

柒、結論

- 一、大於等於 2 的所有正整數 N 中、除了 2 與 5 之外，只有尾數 1、3、7、9 的正整數才可能為質數。
- 二、過去文獻中所使用的傳統的「篩法」、「試除法」、Fermat 的平方法、AKS 質數測試演算法要簡易地判斷一個正整數是否為質數，似乎不容易達成。
- 三、本研究創立的「尾數篩法」是另一種可以檢視正整數 N 是否為質數的方法，雖然也不是一個能簡易地判斷正整數 N 是否為質數的方法；但對於國中生而言計算方式簡單，也是善用數值「狐狸尾巴」特色的一種質數判別方式。再透過轉換成「等差數列」的方法，可在電腦 Excel 軟體裡內建尾數 1、3、7、9 的合成數，在內建合成數的範圍內，利用 Excel 的『尋找(F)』功能搜尋要找的數值，若搜尋的到，則此數就為合成數，若搜尋不到，則此數就為質數，如此就可以簡易的判別正整數 N 是否為質數了。

捌、參考資料及其他

- 一、李坤能 (2012)，翰林版國民中學二下數學課本，頁 12-24。
- 二、李恭晴 (1988)，整數論。台北：協進圖書有限公司。
- 三、黃萬福 (1991)，質數特性研究。高雄工專學報，21 期，頁 369-392。
- 四、唐文標：質數。網址：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_04_4_04/index.html。
- 五、維基百科：質數。網址：<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%B4%A0%E6%95%B0>。